6. TESTE PARAMETRICE

- Definiția, etapele si scopul unui test parametric de verificare a ipotezelor statistice
- Testarea ipotezelor pentru media unei populații (testele z și Student „t”)
- Testarea ipotezelor pentru proporția unei populații (testul z)
- Testarea ipotezelor pentru diferența mediilor a două populații (testele z și t)
- Testarea ipotezelor pentru diferența proporțiilor a două populații (testul z)
- Testarea ipotezelor pentru raportul variantelor a două populații (testul Fisher „F”)

OBIECTIVELE CURSULUI

La finalizarea acestui capitol, studentul va fi capabil să:

O9-1: să înțeleagă situațiile când se utilizează în practică testele parametrice de verificare a ipotezelor statistice precum și scopul acestora

O9-2: să înțeleagă etapele unui test de verificare a ipotezelor statistice

O9-3: să calculeze și să interpreteze testele statistice *„z”*, *„t”*, și *„F”* în cadrul procesului de inferență statistică

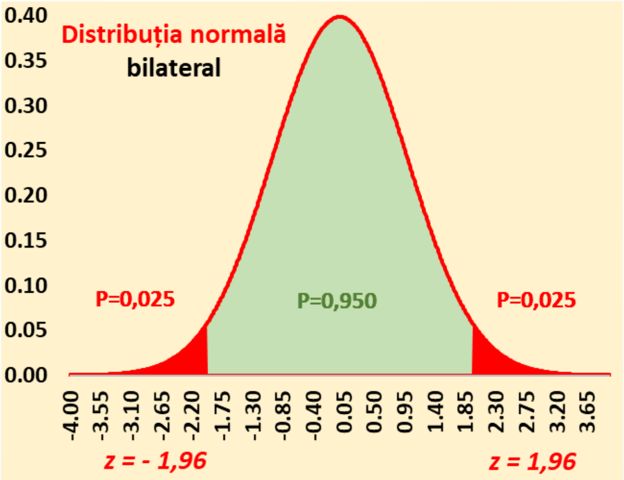
O9-4: să înțeleagă cum să calculeze și să interpreteze valorile *„p”* asociate unui anumit test statistic

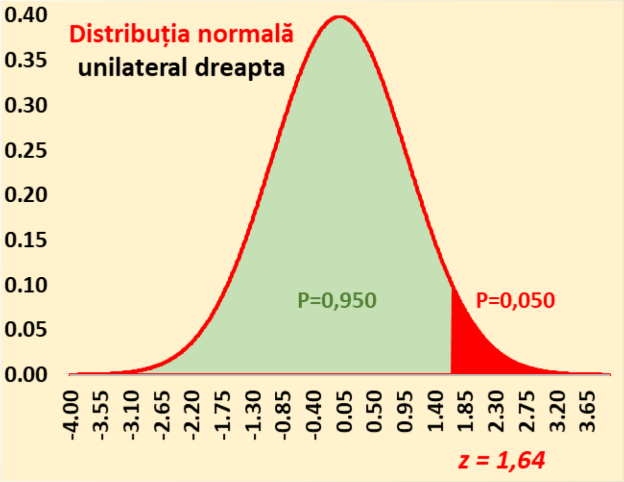
INTRODUCERE

Testele parametrice sunt proiectate în general pentru analiza datelor cantitative, a căror distribuție de valori respectă legea de repartiție normală sau în cazurile în care devine aplicabilă teorema limită centrală. Aceste teste de ipoteză sau de semnificație statistică compară parametrii statistici din populațiile generale studiate, cum ar fi media aritmetică, proporția sau varianța acestora.

Testele parametrice de ipoteză pot fi bilaterale (regiunea de respingere este împărțită în două părți egale între cele 2 cozi laterale ale distribuției) sau unilaterale (regiunea de respingere este doar într-una dintre cele 2 părți).

Toate valorile posibile pe care le poate lua un test statistic sunt puncte pe axa orizontală a graficului distribuției lui, împărțite în două grupuri: zona de respingere și zona de non-respingere (de ex testul z – fig. alăturată).





Nivelurile testului situate în ZONA DE RESPINGERE reprezintă *acele valori care sunt cel mai puțin probabil să apară în cazul în care ipoteza nulă H_0 este adevărată*.

Valorile testului care se vor situa în zona de respingere sunt calculate pe baza nivelului de semnificație α (aria de sub curba distribuției testului care depășește valorile de pe axa absciselor din zona de respingere). Cele mai frecvente valori sunt: $\alpha = 0.05$ și $\alpha = 0.01$. Nivelul de semnificație α este probabilitatea de a respinge o ipoteză nulă adevărată (*eroarea de tip I*)

SCOPUL TESTELOR DE VERIFICARE A IPOTEZELOR STATISTICE

Este reprezentat de asistarea factorilor de decizie (administratori, medici) în luarea unor decizii eficiente. Aceștia depind de decizia statistică: în situația în care ipoteza nulă este respinsă acest lucru se reflectă în faptul că decizia finală este compatibilă cu ipoteza alternativă. Și reversul este de multe ori adevărat, în situația când ipoteza nulă nu este respinsă. În această situație, este posibil însă ca factorii de decizie să considere utilă colectarea mai multor date în vederea unei analize ulterioare.

Rezultatul unui test statistic reprezintă doar un singur element care stă la baza unor decizii eficiente. DECIZIA STATISTICĂ NU TREBUIE INTERPRETATĂ CA FIIND DEFINITIVĂ, trebuind a fi coroborată cu celelalte informații relevante disponibile.

ETAPELE UNUI TEST PARAMETRIC

1) Evaluarea tipului de date care vor fi analizate (numerice, categoriale)
2) Presupunerile testelor parametrice: normalitatea distribuției populațiilor din care provin eșantioanele, egalitatea varianțelor populațiilor, independența eșantioanelor, etc.
3) Ipotezele de lucru (H_0 „ipoteza nulă sau ipoteza absenței diferențelor” va fi testată în scopul expres de a fi discreditată; H_A „ipoteza alternativă” reprezintă o afirmație pe care o vom considera adevărată dacă datele analizate la nivel de eșantion aduc suficiente dovezi in sprijinul respingerii ipotezei nule H_0); semnele = , ≥ sau ≤ apar întotdeauna în H_0
4) Distribuția de sondaj a testului statistic: elementul cheie al procesului de inferență statistică (obținerea unei concluzii privind o populație prin examinarea unui eșantion provenit din aceasta) este reprezentat de *distribuția de sondaj a statisticii calculate la nivelul eșantionului* (*z, t, χ^2, F, etc.*), respectiv toate valorile posibile pe care le poate lua această statistică la nivelul tuturor eșantioanelor de același volum extrase aleator din aceeași populație.
5) Calcularea valorii testului statistic prin utilizarea datelor din eșantionul studiat:

$$test = \frac{statistica\ din\ esantion - parametrul\ corespunzator\ al\ populatiei}{eroarea\ standard\ a\ statisticii\ din\ esantion}$$

6) **Regula de decizie**: dacă valoarea calculată a testului statistic se află în zona de respingere vom respinge ipoteza nulă, iar dacă se situează în regiunea de non-respingere nu vom respinge H_0

7) **Concluzie**: atunci când **respingem ipoteza nulă *H_0*** o **preferăm pe cea alternativă *H_A*** (ca urmare a depășirii nivelului de încredere $P = 1 - \alpha$ (de obicei 95% sau 99%). Când *H_0* nu este respinsă, atunci concluzionăm că ipoteza nulă ar putea fi adevărată.

EROAREA STANDARD (*SE*) a unei statistici, care estimează de obicei un parametru al populației, reprezintă **deviația standard a distribuției sale de sondaj**. Este un element cheie în construirea intervalelor de încredere. Dacă statistica de interes este media eșantionului, atunci avem eroarea standard a mediei ($\sigma_{\overline{x}}$), care măsoară dispersia sau împrăștierea mediilor eșantioanelor de același volum *n* extrase dintr-o populație *N* în jurul mediei acestei populații: $$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$	**VALOAREA *P*** este **probabilitatea exactă** ca valoarea calculată a testului statistic să fie cel puțin la fel de „neobișnuită” sau „extremă” ca valoarea teoretică, atunci când *H_0* este adevărată. Valoarea p reprezintă **cea mai mică valoare a lui α** pentru care putem respinge ipoteza nulă *H_0*. *De ex. p = 0,034 reprezintă probabilitatea de a obține o valoare z ≤ -2,12 sau z ≥ 2,12 atunci când H_0 este adevărată.*

TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU MEDIA UNEI POPULAȚII

A. Eșantionul provine dintr-o populație normal distribuită sau dintr-o populație care nu urmează o distribuție normală dar volumul său n ≥ 30 (TLC), având varianța (σ) cunoscută

B. Eșantionul provine dintr-o populație normal distribuită având varianța (σ) necunoscută

A. EȘANTIONUL PROVINE DINTR-O POPULAȚIE NORMAL DISTRIBUITĂ SAU DINTR-O POPULAȚIE CARE NU URMEAZĂ O DISTRIBUȚIE NORMALĂ DAR VOLUMUL SĂU N ≥ 30 (TLC), AVÂND VARIANȚA (σ) CUNOSCUTĂ

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\mu = \mu_0$ (H_A: $\mu \neq \mu_0$) este:

$$z_{calc} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o distribuție normală standard.

În cadrul distribuției de sondaj a mediilor eșantioanelor extrase dintr-o populație normal distribuită, $\overline{x}$ reprezintă un ESTIMATOR NEDEPLASAT al mediei populației μ, având varianța:

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Astfel, eroarea standard a mediei eșantionului va fi:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

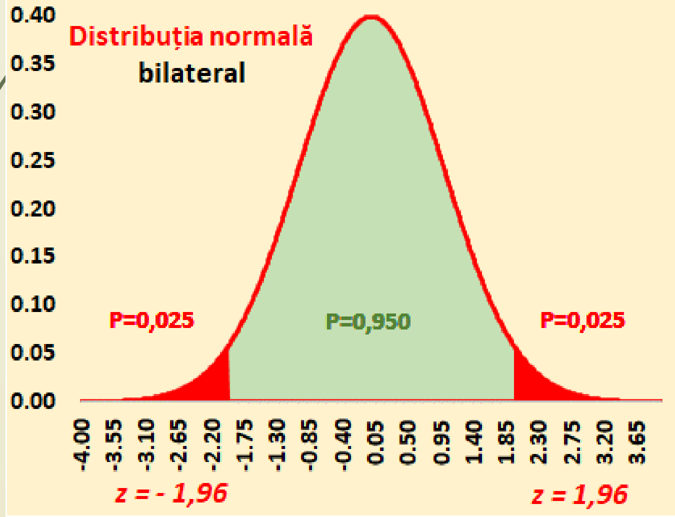
Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

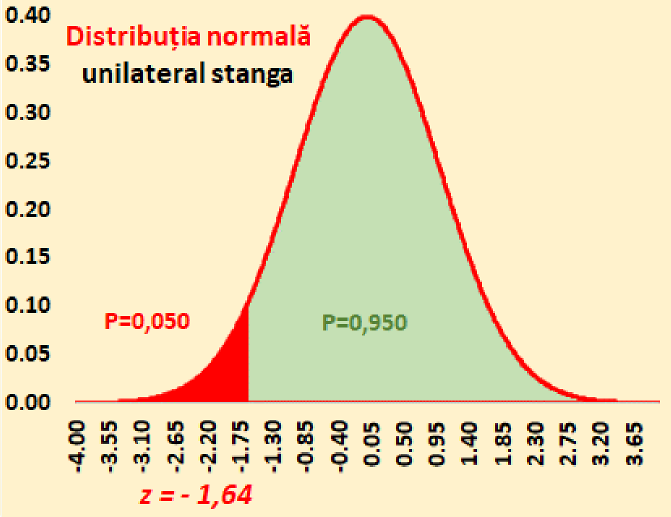
Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = 1,96$ reprezintă abscisa corespunzătoare probabilității cumulate $P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$, *în Excel → =NORM.S.INV(0.975)*

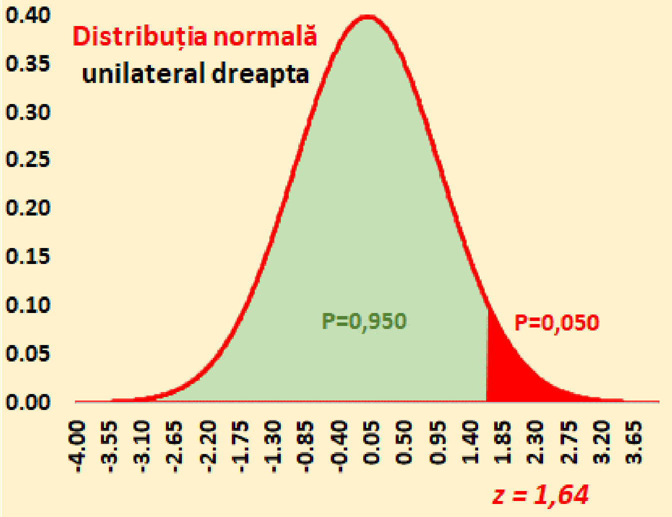
Regiunea de respingere a testului z va fi în compusă din 2 părți: $z_{calc} \leq -z_{1-\alpha/2}$ și $z_{calc} \geq z_{1-\alpha/2}$

Vom respinge H_0 dacă valoarea calculată a testului este cuprinsă în regiunea de respingere

În practică, deosebim 3 situații distincte: test bilateral (regiunea de respingere este situată în ambele cozi ale distribuției) test unilateral stânga și test unilateral dreapta.







Ex: Suntem interesați de cercetarea vârstei medii a unei anumite populații și formulăm următoarea întrebare: Putem concluziona că vârsta medie a acestei populații este diferită de 45 de ani? Datele disponibile sunt reprezentate de vârstele unui eșantion format din 10 indivizi selectați aleator din această populație, pentru care s-a determinat o valoare medie de 42 de ani.

Presupunem că eșantionul provine dintr-o populație care urmează o distribuție aproximativ normală, pentru care se cunoaște valoarea varianței $\sigma^2 = 20$.

- Ipoteza nulă H_0: Vârsta medie a populației este 45 ani ($\mu = 45$)
- Ipoteza alternativă H_A: Vârsta medie a populației nu este de 45 de ani ($\mu \neq 45$)

Considerăm nivelul de semnificație asociat testului: $\alpha = 0.05$; Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = 1,96$

Testul statistic (bilateral) utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0:

$$z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{42 - 45}{\sqrt{20/10}} = \frac{-3}{1.41} = -2.12$$

Testul statistic z este distribuit normal, având media 0 și varianța 1. În situația de față există un număr enorm de valori ale testului z, câte una pentru fiecare eșantion de volum $n = 10$ extras din această populație, din care noi dispunem doar de una ($z_{calc} = -2.12$).

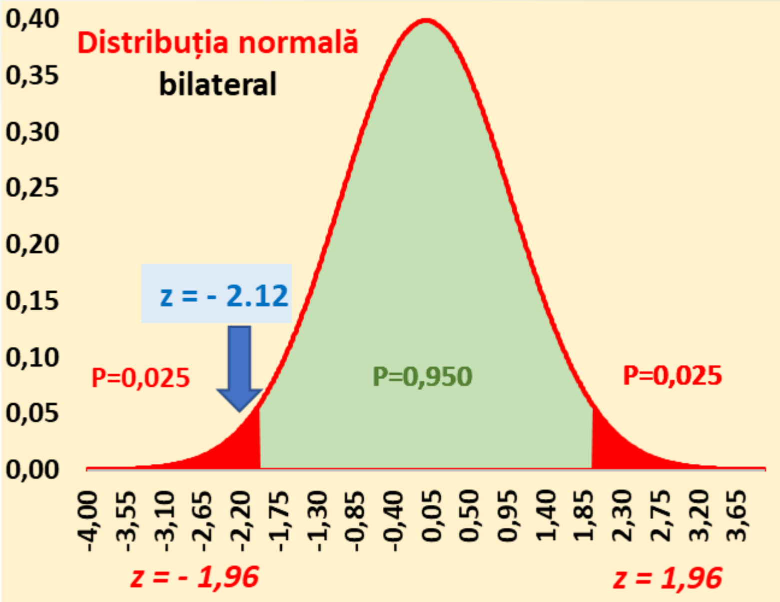
Cât de „extremă” sau „neobișnuită” ar trebui să fie valoarea testului statistic calculat la nivelul eșantionului studiat pentru a se încadra în regiunea de respingere?

Vom respinge H_0 dacă valoarea calculată a testului este cuprinsă în **regiunea de respingere**, pentru $\alpha = 0.05$. Conform datelor din eșantionul nostru avem $z_{calc} = -2.12$, valoare situată în mod evident în regiunea de respingere (*zona marcată cu roșu*).

Prin urmare, **vom respinge ipoteza nulă H_0** și vom afirma că valoarea calculată a testului statistic este semnificativă la un nivel $\alpha = 0.05$. **Concluzionăm că media populației studiate nu este egală cu 45 de ani** și vom lua decizia finală conform acestui rezultat.

O alternativă des întâlnită în literatura de specialitate se referă la raportarea **probabilității exacte** de a obține o valoare la fel de „neobișnuită" (extremă) decât cea calculată, în situația când ipoteza nulă este adevărată.

În cazul exemplului nostru, avem $p = 0.034$ $(0,017 + 0,017)$, cu alte cuvinte probabilitatea de a obține o valoare cel puțin la fel de „extremă" cum este 2.12 în ambele direcții, când ipoteza nulă este adevărată este 0.034 (sau 3.4%). Se poate utiliza funcția Excel =NORM.S.DIST(-2.12,TRUE)



DISTRIBUTIA NORMALA STANDARD

z	Probabilitati cumulate						
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
...	...	...	...	...	...	...	...
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846

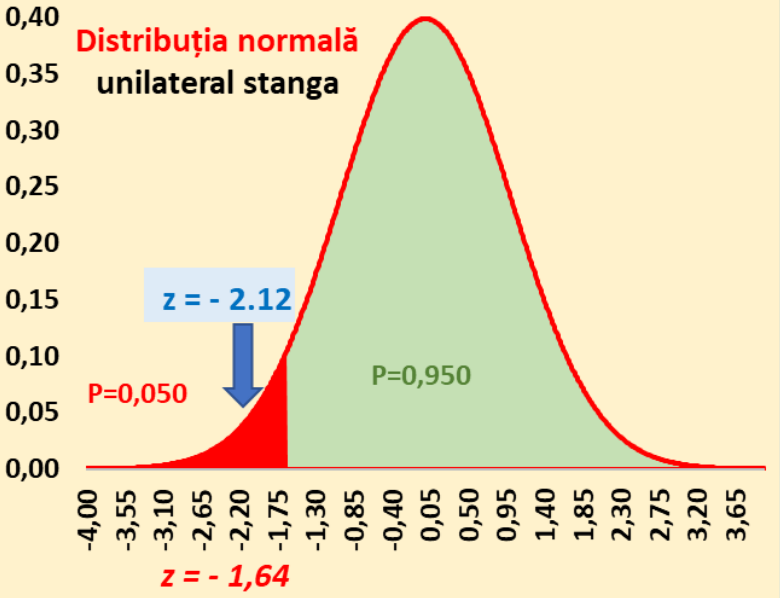
Testele statistice pot fi însă și unilaterale, situație în care regiunea de respingere este situată doar într-una dintre cozile laterale. Mergând pe linia exemplului anterior, în loc să investigăm dacă media poate fi considerată diferită de 45 de ani, cercetăm dacă putem concluziona că vârsta medie a populației este mai mică de 45 de ani (test unilateral stânga). Astfel, avem:

- Ipoteza nulă H_0: Vârsta medie a populației este mai mare sau egală cu 45 ani ($\mu \geq 45$)
- Ipoteza alternativă H_A: Vârsta medie a populației este mai redusă de 45 de ani ($\mu < 45$)

Considerăm nivelul de semnificație asociat testului: $\alpha = 0.05$ Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = -1,645$ (valoarea lui z la stânga căreia se situează 0.05 sau 5% din aria de sub curba normală).

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0:

$$z_{calc} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{42 - 45}{\sqrt{20/10}} = \frac{-3}{1.41} = -2.12$$



DISTRIBUTIA NORMALA STANDARD

z	Probabilitati cumulate					
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
...	...	...	...	...	...	...
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Vom respinge H_0 dacă valoarea calculată a testului este cuprinsă în regiunea de respingere $z_{calc} \leq -1.645$, pentru $\alpha = 0.05$. Conform datelor din eșantionul nostru avem $z_{calc} = -2.12 < -1.645$, valoare situată în regiunea de respingere.

Prin urmare, vom respinge ipoteza nulă H_0 și vom afirma că valoarea calculată a testului statistic este semnificativă la un nivel $\alpha = 0.05$. Concluzionăm că media de vârstă a populației studiate este mai mică 45 de ani și vom lua decizia finală conform acestui rezultat ($p = 0.017$).

În cercetarea științifică, TESTELE STATISTICE BILATERALE SUNT DE OBICEI PREFERATE FAȚĂ DE CELE UNILATERALE pentru că sunt mai conservatoare și neutre, oferind o evaluare mai riguroasă și echilibrată a ipotezelor de testat.

- ✓ Imparțialitate față de direcția efectului: testele bilaterale nu presupun anticipat în ce direcție va apărea efectul. Ele verifică dacă există orice diferență între grupuri (fie ea pozitivă sau negativă), fără a face presupuneri apriorice despre direcția acesteia. În contrast, testele unilaterale verifică o diferență într-o direcție specifică (de exemplu, numai creșterea sau scăderea), iar dacă efectul real este în direcția opusă, acest lucru ar putea să nu fie detectat.

- ✓ Risc mai mic de a face erori de tip I: în testele unilaterale, ipoteza nulă este respinsă doar dacă rezultatul este suficient de extrem într-o anumită direcție (doar o creștere sau doar o scădere). Astfel, probabilitatea erorii de tip I $\alpha = 0.05$ este concentrată într-o singură coadă a distribuției (pozitivă sau coada negativă).

Spre deosebire de testele unilaterale, în testele bilaterale, ipoteza nulă presupune că nu există nicio diferență între grupuri sau variabile, iar noi suntem interesați să vedem dacă datele arată o diferență semnificativă în orice direcție. Acest lucru înseamnă că trebuie să verificăm ambele "cozi" ale distribuției, atât valorile extreme pozitive, cât și cele extreme negative (la un test bilateral, acest prag $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între ambele părți ale distribuției: 0.025 pentru coada din stânga și 0.025 pentru coada din dreapta).

- ✓ Neutralitate și validitate în raport cu ipoteza nulă: într-o abordare științifică riguroasă, este important să se adopte o poziție neutră, investigând dacă există o diferență semnificativă, fără a presupune de la început că aceasta va avea o anumită direcție.
- ✓ Acceptabilitate mai mare în mediul academic: comunitatea științifică este adesea sceptică față de testele unilaterale deoarece acestea pot fi văzute ca o formă de manipulare a rezultatelor pentru a obține mai ușor o semnificație statistică: "p-hacking". Un test bilateral are standarde mai stricte și este mai acceptat ca metodă robustă și corectă.
- ✓ Detectarea efectelor neașteptate: în anumite situații, efectele într-o direcție opusă față de cea anticipată ar putea fi foarte importante din punct de vedere științific. Un test bilateral este capabil să detecteze aceste efecte neașteptate, ceea ce nu se întâmplă în cazul unui test unilateral, care este limitat la o singură direcție a ipotezei.

B. EȘANTIONUL PROVINE DINTR-O POPULAȚIE NORMAL DISTRIBUITĂ AVÂND VARIANȚA (σ) NECUNOSCUTĂ

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\mu = \mu_0$ (H_A: $\mu \neq \mu_0$) este:

$$t_{calc} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o distribuție Student (t) cu $n - 1$ grade de libertate.

În situația când nu se cunoaște deviația standard a populației generale se utilizează deviația standard ajustată ***s*** calculată la nivel de eșantion:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Pentru determinarea valorii critice $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ putem folosi tab. distribuției t. *(=T.INV(0.975,n-1))*

Regiunea de respingere a testului ***t*** va fi în consecință compusă din 2 părți:

$$t_{calc} \leq -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \text{ și } t_{calc} \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$$

TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU PROPORȚIA UNEI POPULAȚII

Este similară cu procedura anterioară realizată în cazul mediei. Atunci când volumul eșantionului este suficient de mare ($n \cdot p \geq 5$ *și* $n \cdot (1-p) \geq 5$) se aplică Teorema Limită Centrală.

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă $H_0: p = p_0$ ($H_A: p \neq p_0$) este:

$$z_{calc} = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o distribuție normală standard.

Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = 1,96$ reprezintă abscisa corespunzătoare probabilității cumulate $P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ *(=NORM.S.INV(0.975))*

Regiunea de respingere a testului z va fi în consecință compusă din 2 părți:

$$z_{calc} \leq -z_{\alpha/2} \quad \text{și} \quad z_{calc} \geq z_{\alpha/2}$$

Ex: Presupunem că extragem în mod aleator un eșantion de $n = 500$ de studenți de la 3 universități din Iași și observăm faptul că 278 sunt din județul Iași, iar restul de 222 din județele Vaslui, Botoșani, Neamț, Bacău și Suceava. Putem concluziona că proporția tuturor studenților ieșeni care studiază în județul Iași este diferită de 0.5? Cu alte cuvinte, este $p = 278/500 = 0.556$ „suficient” de diferită de 0.5 ?

Putem aplica Teorema Limită Centrală deoarece $n \cdot p = 278 > 5$ și $n \cdot (1 - p) = 222 > 5$
Astfel, distribuția binomială poate fi aproximată printr-o distribuție normală.

Ipoteza nulă H_0: Proporția studenților din județul Iași este 0.5 ($p_0 = 0.5$)

Ipoteza alternativă H_A: Proporția studenților din județul Iași nu este 0.5 ($p_0 \neq 0.5$)

Considerăm nivelul de semnificație asociat testului: $\alpha = 0.05$. Avem un test bilateral: $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = 1,96$ reprezintă abscisa corespunzătoare probabilității cumulate

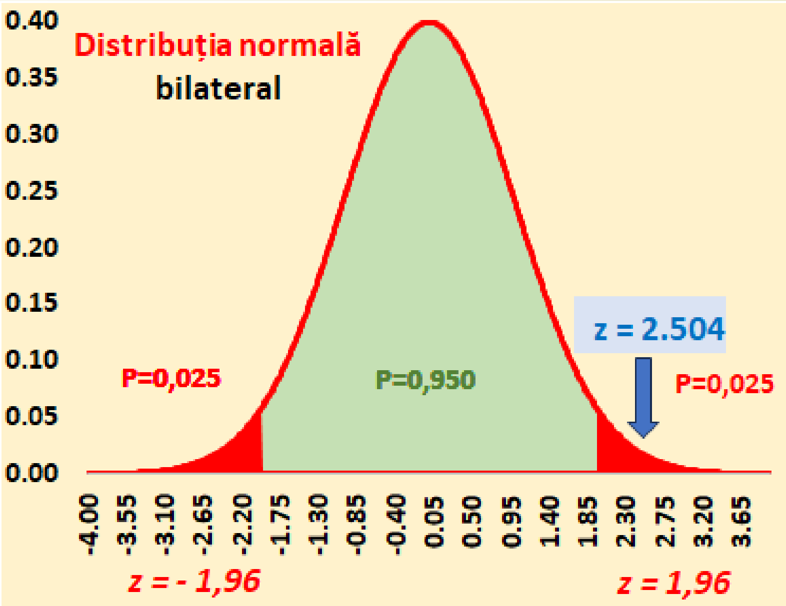
$$P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$$ *(=NORM.S.INV(0.975))*

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $p = p_0$ este:

$$z_{calc} = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}} = \frac{0.556 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot (1 - 0.5)}{500}}} = 2.504$$

Presupunând că proporția studenților ieșeni în populația generală este 0.5 (H_0 este adevărată), proporția calculată la nivelul eșantionului de 0.556 este cu 2.504 deviații standard mai mare, fiind în zona de respingere.

Prin urmare, vom respinge ipoteza nulă H_0 și vom afirma că valoarea calculată a testului statistic este semnificativă la un nivel $\alpha = 0.05$. Concluzionăm că proporția studenților ieșeni din populația studiată (toți studenții care studiază în județul Iași) nu este egală cu 0.5 și vom lua decizia finală conform acestui rezultat.



Se citește din tabelul distribuției normale standard probabilitatea cumulată aferentă valorii calculate a testului $z_{calc} = 2.504$, care este $p = 0.994$. (în Excel =NORM.S.DIST(2.504,TRUE)). Astfel, când H_0 este adevărată, probabilitatea de a obține o valoare a lui z cel puțin la fel de mare ca 2.12 este $1 - p = 1 - 0.994 = 0.006$ și, fiind un test bilateral, probabilitatea de a observa o valoare a lui z cel puțin la fel de scăzută ca -2.504 este tot 0.006 (curba normală este simetrică).

Astfel, în cazul exemplului nostru, avem $p = 0.006 + 0.006 = 0.012$, cu alte cuvinte probabilitatea de a obține o valoare cel puțin la fel de „extremă” cum este 2.504 în ambele direcții, când ipoteza nulă este adevărată este 0.012 (sau 1.2%).

TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU DIFERENȚA MEDIILOR A DOUĂ POPULAȚII

Deosebim 4 cazuri principale:

A. EȘANTIOANELE SUNT INDEPENDENTE ȘI PROVIN DIN 2 POPULAȚII NORMAL DISTRIBUITE SAU DIN POPULAȚII CARE NU URMEAZĂ O DISTRIBUȚIE NORMALĂ DAR VOLUMUL LOR N ≥ 30 (TLC) AVÂND VARIANȚELE (σ_1, σ_2) CUNOSCUTE

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\mu_1 = \mu_2$ sau $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ sau $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$) este:

$$z_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o DISTRIBUȚIE NORMALĂ STANDARD.

În cadrul distribuției de sondaj a diferenței mediilor eșantioanelor extrase din 2 populații, $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ reprezintă un estimator nedeplasat al diferenței mediilor populațiilor $(\mu_1 - \mu_2)$, având varianța:

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Astfel, eroarea standard a diferenței dintre mediile celor 2 eșantioane va fi:

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = 1,96$ reprezintă abscisa corespunzătoare probabilității cumulate $P = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0,05}{2} = 1-0,025 = 0,975$ *(=NORM.S.INV(0.975))*

Regiunea de respingere a testului z va fi în compusă din 2 părți: $z_{calc} \le -z_{\alpha/2}$ și $z_{calc} \ge z_{\alpha/2}$

B. EȘANTIOANELE SUNT INDEPENDENTE ȘI PROVIN DIN 2 POPULAȚII NORMAL DISTRIBUITE AVÂND VARIANȚELE (σ_1, σ_2) NECUNOSCUTE ȘI EGALE

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\mu_1 = \mu_2$ sau $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ sau $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$) este:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1}+\frac{s_p^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1}+\frac{s_p^2}{n_2}}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o DISTRIBUȚIE STUDENT (t) cu $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$ grade de libertate.

Dacă presupunerea de egalitate a varianțelor populațiilor studiate este justificată, atunci cele 2 varianțe calculate la nivelul fiecărui eșantion pot fi considerate drept estimatori ai unei varianțe comune (s_p^2), determinată ca o medie ponderată a varianțelor celor 2 eșantioane (s_1^2 și s_2^2). Ponderea fiecărei varianțe de eșantion este reprezentată de gradele sale de libertate $(n_1 - 1)$ și $(n_2 - 1)$.

$$s_p^2 = \frac{s_1^2 \cdot (n_1 - 1) + s_2^2 \cdot (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Eroarea standard a estimării va fi:

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$$

Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Pentru determinarea valorii critice $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ putem folosi tabelele distribuției t, sau în Excel:

=T.INV(0.975, n_1+$n_2 - 2$)

Regiunea de respingere a testului Student :

$$t_{calc} \leq -t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}} \quad \text{și} \quad t_{calc} \geq t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}}$$

C. EȘANTIOANELE SUNT INDEPENDENTE ȘI PROVIN DIN 2 POPULAȚII NORMAL DISTRIBUITE AVÂND VARIANȚELE (σ_1, σ_2) NECUNOSCUTE ȘI INEGALE

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\mu_1 = \mu_2$ sau $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ sau $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$) este:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează aproximativ o DISTRIBUȚIE WELCH t_r (o variantă adaptată a distribuției Student), unde r reprezintă valoarea ajustată a gradelor de libertate, care se determină cu următoarea formulă:

$$r = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Întrucât valoarea ajustată a gradelor de libertate r în cele mai multe cazuri un număr real, putem utiliza în analiză doar partea întreagă a acestuia.

D. EȘANTIOANELE SUNT DEPENDENTE (DATELE SUNT PERECHI) ȘI PROVIN DINTR-O POPULAȚIE NORMAL DISTRIBUITĂ

În locul studierii valorilor individuale, vom utiliza în analiză diferența între fiecare pereche de observații a variabilei de interes. Cele *n* diferențe calculate la nivel de eșantion din cele *n* perechi de valori reprezintă un eșantion aleator extras dintr-o populație normal distribuită a diferențelor. Observațiile pereche pot fi reprezentate de aceeași subiecți analizați înainte și după aplicarea unui anumit tip de tratament, în scopul evaluării eficienței acestuia.

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\mu_d = 0$ versus H_A: $\mu_d \neq 0$ este:

$$t_{calc} = \frac{\bar{d} - \mu_{d_0}}{\frac{s_{\bar{d}}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_{\bar{d}}}{\sqrt{n}}}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o DISTRIBUȚIE STUDENT cu $n-1$ grade de libertate.

$s_{\bar{d}}$ reprezintă deviația standard a diferențelor ajustată, calculată la nivel de eșantion:

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Pentru determinarea valorii critice $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ putem folosi tabelele distribuției t. *=T.INV(0.975,n-1)*

Regiunea de respingere a testului t va fi în consecință compusă din 2 părți:

$$t_{calc} \leq -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \text{ și } t_{calc} \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$$

TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU DIFERENȚA PROPORȚIILOR A DOUĂ POPULAȚII

EȘANTIOANELE SUNT INDEPENDENTE ȘI PROVIN DIN 2 POPULAȚII APROXIMATIV NORMAL DISTRIBUITE

Atunci când volumul eșantionului este suficient de mare: $n_1 \cdot \hat{p}_1 \geq 5,\ n_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) \geq 5, n_2 \cdot \hat{p}_2 \geq 5,\ n_2 \cdot (1 - \hat{p}_2) \geq 5$ **se aplică Teorema Limită Centrală.**

Distribuția de sondaj a diferenței proporțiilor celor două eșantioane $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$, **ca estimator punctual al diferenței proporțiilor celor 2 populații** $(p_1 - p_2)$ **va fi aproximativ normal distribuită având media** $(p_1 - p_2)$.

În baza ipotezei nule H_0: $p_1 = p_2$ **considerăm faptul că proporțiile celor două populații sunt egale (sau** $\hat{p}_1$ **și** $\hat{p}_2$ **estimează aceeași proporție comună):**

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

în care x_1 **și** x_2 **reprezintă numărul de unități statistice din fiecare eșantion care posedă caracteristica de interes, iar** n_1 **și** n_2 **volumele celor 2 eșantioane.**

Astfel, eroarea standard a diferenței dintre proporțiile celor 2 eșantioane va fi:

$$\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n_1} + \frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n_2}}$$

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $p_1 = p_2$ sau $p_1 - p_2 = 0$ (H_A: $p_1 \neq p_2$ sau $p_1 - p_2 \neq 0$) este:

$$z_{calc} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\hat{\sigma}_{p_1-p_2}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n_1} + \frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n_2}}}$$

care, atunci când H_0 este adevărată, urmează o DISTRIBUȚIE NORMALĂ STANDARD.

Nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$ va fi împărțit în mod egal între cele două cozi laterale $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mici și $\alpha/2 = 0.025$ asociat cu valorile foarte mari.

Valoarea critică $z_{1-\alpha/2} = 1,96$ reprezintă abscisa corespunzătoare probabilității cumulate $P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ *(=NORM.S.INV(0.975))*

Regiunea de respingere a testului z va fi în compusă din 2 părți: $z_{calc} \leq -z_{\alpha/2}$ și $z_{calc} \geq z_{\alpha/2}$

TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU RAPORTUL VARIANȚELOR A DOUĂ POPULAȚII

EȘANTIOANELE SUNT INDEPENDENTE ȘI PROVIN DIN 2 POPULAȚII NORMAL DISTRIBUITE

Așa cum am văzut anterior, în evaluarea condițiilor preliminare ale testului Student „t" pentru diferența dintre mediile a două populații, trebuie să stabilim dacă varianțele populațiilor pot fi considerate egale și în consecință să aplicăm testul t corespunzător. Singurele informații de care dispunem însă privind varianțele populațiilor generale sunt cele furnizate de cele două eșantioane de studiu, extrase în mod aleator din acestea.

Dorim să apreciem dacă diferența, care în mod inevitabil va exista între varianțele celor două eșantioane studiate, ne indică o diferență reală între varianțele populațiilor de referință sau aceasta este doar rezultatul întâmplării, varianțele acestor populații fiind de fapt egale.

Deciziile privind compararea varianțelor a două populații au la bază testarea statistică a raportului acestora, pornind de la ipoteză nulă a egalității lor ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Atunci când testăm ipoteza egalității varianțelor a două populații, investigăm ipoteza că raportul lor este egal cu 1.

În situația în care eșantioanele sunt independente și provin din 2 populații aproximativ normal distribuite, raportul $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$ urmează o DISTRIBUȚIE FISHER cu $n_1 - 1$ grade de libertate la numărător și $n_2 - 1$ grade de libertate la numitor.

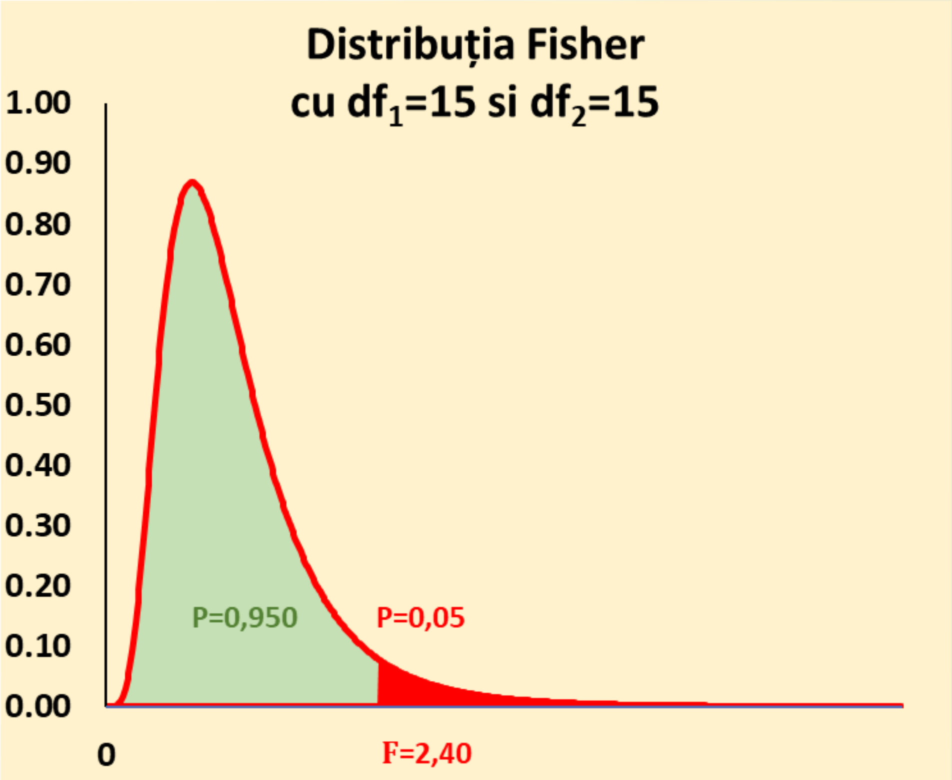
Testul F este foarte sensibil la abaterile de la normalitate ale celor două populații și, din acest motiv, atunci când presupunerile de normalitate nu sunt rezonabile nu se recomandă utilizarea lui în practică (se pot utiliza în acest caz teste mai robuste, cum ar fi: Levene sau Bonett, care se bazează doar pe ipoteza că variabilele sunt de tip cantitativ).

Testul statistic utilizat pentru a testa ipoteza nulă H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ și H_A: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$:

$$F_{calc} = \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

care atunci când H_0 este adevărată urmează o distribuție Fisher cu $n_1 - 1$ grade de libertate la numărător și $n_2 - 1$ grade de libertate la numitor.

Varianța cea mai mare va fi poziționată la numărătorul raportului pentru a beneficia de avantajele unui test *F unilateral dreapta*:



$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \quad \text{și} \quad H_A: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$