5. IPOTEZELE STATISTICE
DIMENSIUNEA EȘANTIONULUI

- **Testarea ipotezelor statistice**
  - **definiție, etape, formula generală a unui test statistic**
  - **nivelul de semnificație**
  - **tipurile de erori care apar**
- **Determinarea volumului eșantionului de studiu pentru estimarea mediei unei populații**
- **Determinarea volumului eșantionului de studiu pentru estimarea proporției unei populații**

OBIECTIVELE CURSULUI

La finalizarea acestui capitol, studentul va fi capabil să:

O8-1: să înțeleagă cum să formuleze corect ipotezele nulă și alternativă în cadrul unui test de verificare a ipotezelor statistice structurat

O8-2: să înțeleagă conceptele de eroare de tip I și eroare de tip II

O8-3: să calculeze volumul eșantionului de studiu pentru estimarea mediei unei populații

O8-4: să calculeze volumul eșantionului de studiu pentru estimarea proporției unei populații

INTRODUCERE

Similar cu situația estimării prin interval de încredere a valorilor parametrilor unei populații (media, proporția, varianța, coeficientul de corelație, etc.) prezentată în cursul anterior și în cazul testării ipotezelor statistice se urmărește obținerea unei concluzii referitoare la o anumită populație supusă studiului prin examinarea unui eșantion reprezentativ extras din aceasta.

În procesul complex de luare a deciziilor în cadrul oricărui domeniu de activitate, personalul implicat trebuie să gestioneze cât mai eficient incertitudinea, neputând fi siguri niciodată de faptul că decizia pe care o luăm este „absolut" corectă.

Cu toate acestea, se poate dezvolta un set de reguli care să ne poată ajuta să controlăm și astfel să minimizăm probabilitatea de a comite o eroare în alegerea soluției optime din mai multe alternative posibile.

Într-o manieră simplificată, putem privi o ipoteză drept o afirmație privitoare la parametrii uneia sau mai multor populații care prezintă interes din diferite perspective. De exemplu:

- Managerul unui spital poate formula o ipoteză potrivit căreia durata medie a internării pacienților dintr-un spital este de 4 zile;
- Un medic specialist poate formula o ipoteză despre faptul că, un anumit medicament poate fi eficient pentru 90% dintre pacienți;
- O companie petrolieră afirmă faptul că aditivul pe care îl utilizează este asociat cu o scădere a consumului de combustibil cu 10%;
- Un profesor le comunică studenților săi faptul că participarea la peste trei sferturi din activitățile de curs pe parcursul semestrului conduce la o creștere a notei finale la examen cu 15%.

TESTAREA IPOTEZELOR STATISTICE

Pentru o înțelegere mai bună a fenomenului, ne putem gândi la studiul eficienței unui medicament nou prin compararea rezultatelor obținute în grupurile de control și de tratament. Astfel, procedura de testare a ipotezelor statistice ne poate furniza informația potrivit căreia efectul medicamentului observat la nivelul eșantionului studiat este probabil să se regăsească și la scara întregii populații din care acesta a fost extras. Acest aspect este foarte important pentru că nu ne dorim să utilizăm pe scară largă medicamentul, dacă el este eficient doar raportat la pacienții din lotul analizat ci avem nevoie de dovezi că va fi eficient pentru întreaga populație de referință. Procedura de testare a ipotezelor statistice ne oferă posibilitatea să putem formula aceste concluzii despre populațiile statistice în ansamblul lor.

A) IPOTEZELE STATISTICE reprezintă o serie de *presupuneri despre parametrii unor populații, care sunt formulate în așa fel încât să permită o evaluare corespunzătoare utilizând metode statistice adecvate*.

Primul pas în procesul testării ipotezelor statistice este reprezentat de formularea ipotezei nule despre parametrul / parametrii unei / unor populații (H_0). Ipoteza nulă este cunoscută drept ipoteza absenței diferențelor, fiind utilizată în scopul expres de a fi discreditată. În consecință, varianta diametral opusă a ceea ce dorește să dovedească echipa de cercetare va fi folosită ca enunț al ipotezei nule.

Ne putem gândi la ipoteza nulă ca reprezentând teoria clasică (implicită) care necesită dovezi suficient de solide, furnizate de eșantionul supus studiului nostru, pentru a putea fi în consecință respinsă. De exemplu, în situația când comparăm mediile a două populații, ipoteza nulă afirmă faptul că diferența dintre cele 2 medii este egală cu zero, sau, cu alte cuvinte, populațiile supuse analizei nu sunt diferite.

În cadrul procesului de testare, ipoteza nulă poate fi respinsă sau nu. În situația când H_0 nu este respinsă vom putea afirma că „datele care stau la baza testului nostru nu aduc suficiente dovezi în sprijinul respingerii ipotezei nule”. Atunci când analiza furnizează suficiente probe care conduc la respingerea ipotezei nule vom spune că datele nu sunt compatibile cu ipoteza nulă dar susțin alte ipoteze.

Ipoteza alternativă (H_1) reprezintă o afirmație despre care vom crede faptul că este adevărată în situația când analiza datelor la nivel de eșantion ne va determina să respingem ipoteza nulă. De cele mai multe ori ipoteza alternativă coincide cu ipoteza cercetării, presupunerea de bază care motivează și susține procesul creator în majoritatea studiilor științifice.

Trebuie precizat faptul că procesul de testare a ipotezelor statistice în particular și chiar inferența statistică în general nu conduc către dovedirea vreunei ipoteze, ci doar indică situația în care o anumită ipoteză statistică este susținută sau nu de datele disponibile la nivel de eșantion. Atunci când eșuăm în a respinge ipoteza nulă nu afirmăm că aceasta este adevărată ci că „ar putea fi adevărată”.

B) TESTUL STATISTIC reprezintă *un indicator care poate fi calculat pe baza datelor din eșantion*. Există un număr enorm de valori pe care un test statistic le poate avea, fiecare dintre acestea depinzând de eșantionul particular care a fost extras. În funcție de nivelul concret pe care îl înregistrează, prin comparație cu valoarea tabelată corespunzătoare tipului de repartiție, testul statistic servește ca element de bază în luarea deciziei de a respinge sau nu ipoteza nulă.

$$\text{Testul statistic} = \frac{\text{Statistica de eșantion} - \text{Parametrul populației}}{\text{Eroarea standard a statisticii de eșantion}}$$

Exemple de teste statistice (pentru media unei anumite populații - eșantionul a fost extras dintr-o populație normal distribuită):

- ❑ cu varianța (σ^2) cunoscută, testul statistic utilizat pentru testarea ipotezei nule H_0: $\mu = \mu_0$ este:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

care, atunci când H_0 este adevărată, urmează o distribuție normală standard

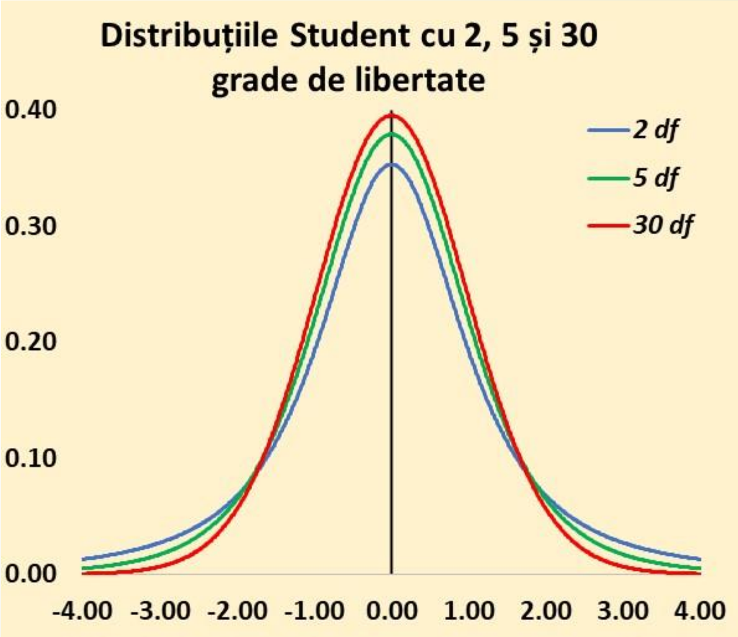
- ❑ cu varianța (σ^2) necunoscută, testul statistic utilizat pentru testarea ipotezei nule H_0: $\mu = \mu_0$ este:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

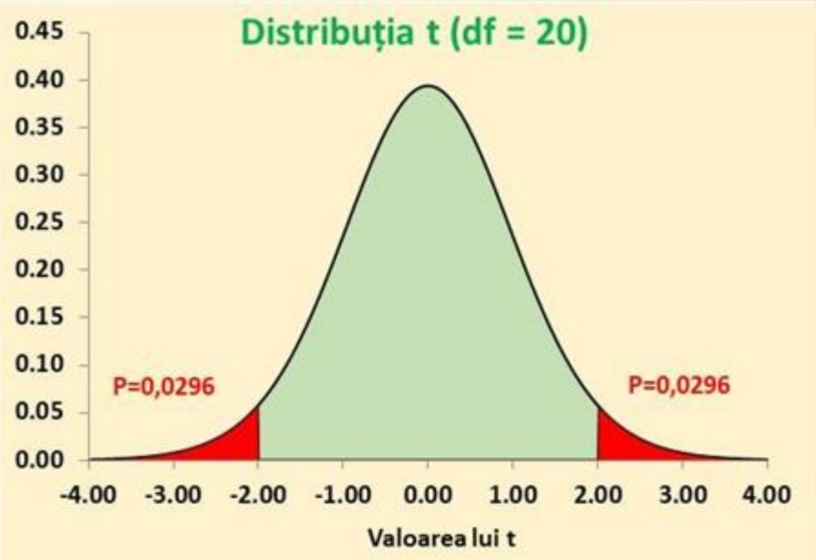
care, atunci când H_0 este adevărată, urmează o distribuție Student cu $n - 1$ grade de libertate

În fiecare caz în parte (*t, z,* X^2, etc.), distribuțiile statistice de sondaj aferente presupun faptul că ipoteza nulă este corectă pentru populația din care am extras eșantioanele în mod aleatoriu. În scopul de a evalua cât de compatibile sunt datele obținute la nivelul de eșantionului nostru cu ipoteza nulă H_0, trebuie să poziționăm valoarea calculată a testului statistic în distribuția sa de sondaj și să determinăm cât de neobișnuită este aceasta. După cum am prezentat în cursurile anterioare, distribuțiile *t, z,* X^2 sunt distribuții probabilistice pe care le putem utiliza pentru a calcula diferite probabilități pentru regiunile situate între curbele respective și axa absciselor.

Ex: Presupunem ca avem o statistică (media) calculată la nivelul unui eșantion (*n = 21*) care urmează o distribuție probabilistică *t (Student)* cu *n – 1 = 20* grade de libertate. Distribuția este centrată în jurul valorii 0, deoarece presupune că ipoteza nulă H_0 a absenței diferențelor este adevărată. În situația când H_0 este adevărată, studiul nostru va genera cel mai probabil o valoare a statisticii *t*, calculată la nivelul eșantionului, apropiată de zero, șansele de a obține valori *t* mai îndepărtate de zero (în ambele sensuri) fiind mult mai reduse.



Considerăm că am obținut la nivelul eșantionului o valoare $t = 2$ în urma studiului ipotetic și dorim să vedem în ce măsură datele din eșantion se „suprapun” peste ipoteza nulă. Din analiza graficului observăm faptul că, considerând că ipoteza nulă este adevărată, distribuția *Student* ne indică că $t = 2$ nu este una dintre cele mai probabile valori pe care le-am putea obține.



Rezultă că valoarea $t = 2$ se obține destul de rar atunci când ipoteza nulă este adevărată. Ne interesează însă cât de rară este această valoare, scopul nostru final fiind reprezentat de evaluarea „nivelului de raritate” al valorii *t*, calculată pentru eșantionul nostru, în scopul de a putea în final justifica respingerea ipotezei nule pentru întreaga populație din care acesta a fost extras. Astfel, avem nevoie să cuantificăm probabilitatea observării valorii calculate *t*.

În acest exemplu, avem un test „*t*” bilateral care ne permite să evaluăm situațiile în care media eșantionului este mai mare sau mai mică decât valoarea de referință. Graficul distribuției Student indică faptul că ambele regiuni $(-\infty; -2)$ și, respectiv, $(2; +\infty)$ evidențiază fiecare o probabilitate de 0,0296, dintr-un total de 0,0592. Astfel, valorile testului *t* se încadrează în aceste regiuni aproximativ 6% din timp atunci când ipoteza nulă este adevărată.

În situația testelor bilaterale (H_0: efectul este egal cu zero și H_1: efectul nu este egal cu zero) se pot detecta atât efectele negative cât și cele pozitive, această categorie de teste reprezentând un standard în procesul de cercetare științifică, unde descoperirea oricărui tip de efect este de obicei de interes pentru echipa de cercetare.

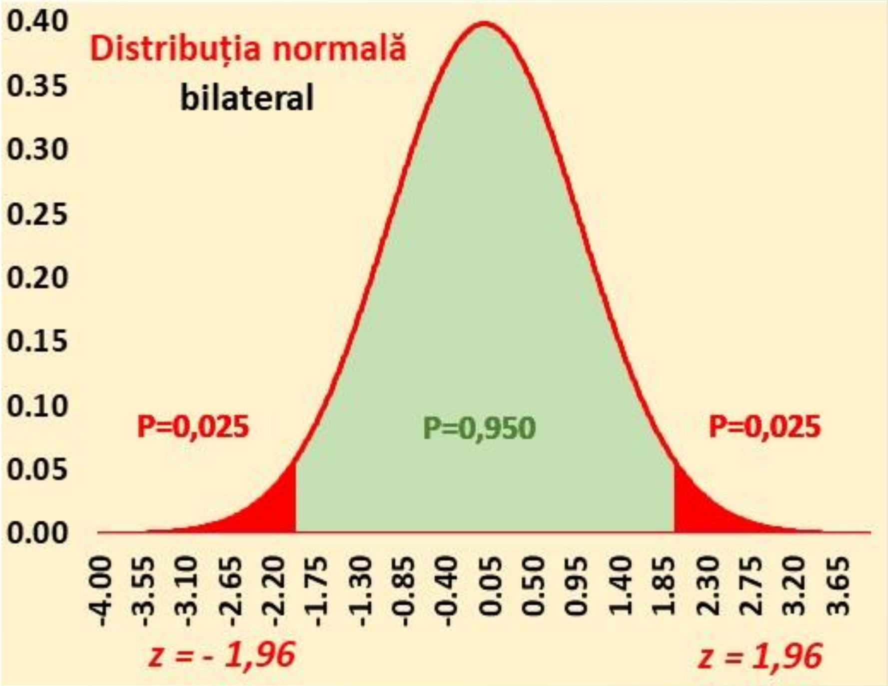
C) DIMENSIUNEA EFECTULUI: reprezintă *diferența dintre valoarea parametrului populației și cea din ipoteza nulă* H_0 *sau dintre valorile parametrilor a două sau mai multe populații*. De exemplu, diferența medie dintre rezultatul obținut în urma utilizării unui medicament în grupul de tratament și în grupul de control.

Ex: Dacă presupunem faptul că media unui grup este 15 și media celuilalt grup este 7, atunci efectul brut este 15-7=8. În practică, întâlnim și forma standardizată a efectului pentru diferența mediilor a două populații (Cohen’s d), care se obține prin raportarea diferenței prezentate anterior la deviația standard comună, de obicei estimată în baza unor studii pilot sau preluată din rezultatele altor cercetări similare realizate anterior. Dimensiunea defectului reprezintă acea diferență clinică relevantă, care poate determina un medic să-și modifice sistemul de tratament.

D) VALOAREA CRITICĂ A TESTULUI: ***reprezintă acele valori care separă regiunea/regiunile de respingere de cea de „acceptare" și ne arată cât de „extremă" trebuie să fie valoarea testului statistic determinat la nivel de eșantion, atunci când ipoteza nulă este adevărată, pentru ca probabilitatea de a obține o valoare similară sau mai mare să fie α.***

Ex: În situația unui test z bilateral, când dorim ca probabilitatea de a respinge ipoteza nulă adevărată să fie 5% ($\alpha = 0,05$), o parte a lui α va fi asociată cu valorile foarte mici și o parte cu valorile foarte mari. În consecință, vom împărți valoarea nivelului de semnificație α în două părți egale, fiecare fiind $\alpha/2 = 0,025$. Astfel, în cazul distribuției normale, dorim să determinăm acea valoare a lui z la dreapta căreia se situează 0,025 sau 2,5% din aria situată sub graficul distribuției sau valoarea lui z care delimitează în partea stângă 0,975 sau 97,5% din suprafața cuprinsă între ea și $-\infty$. Din tabelele cu distribuția normală redusă citim valoarea lui z corespunzătoare ($z = 1,96$).

Funcția Excel: =NORM.S.INV(0.975)

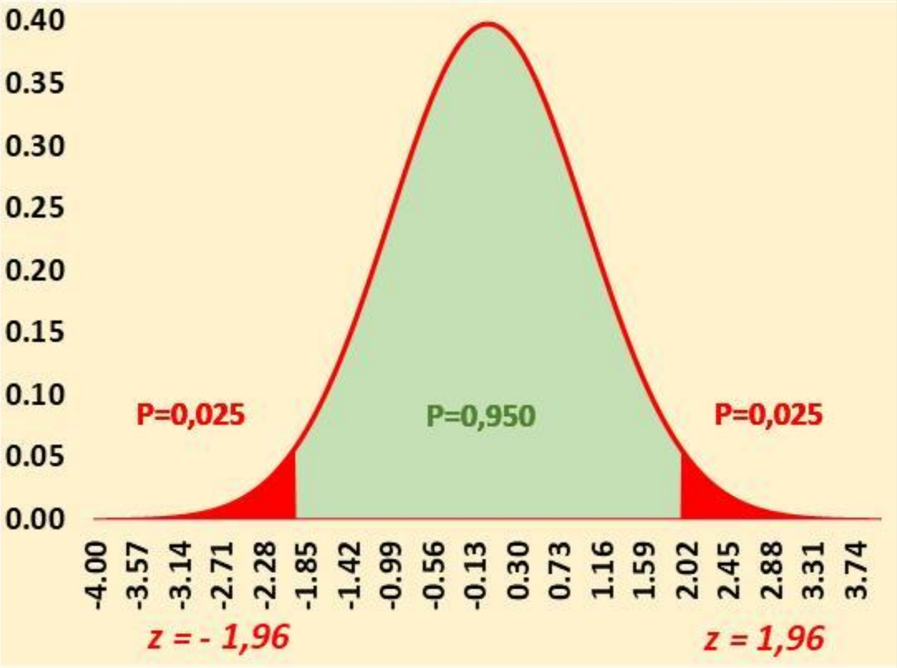


Similar, obținem $z = -1,96$ (probabilitatea obținerii unei asemenea valori sau a uneia mai mici este egală cu 0,025

E) REGULA DE DECIZIE

Toate valorile posibile pe care le poate înregistra un test statistic sunt puncte situate pe axa orizontală a graficului distribuției de sondaj a acestuia, care sunt împărțite în două grupuri:

- **regiunea de respingere**: cuprinde valorile testului statistic (z, t, F, etc.) care sunt cel mai puțin probabil să apară, atunci când ipoteza nulă (H_0) este adevărată;
- **regiunea de „acceptare"**: cuprinde valorile testului statistic care apar cel mai probabil în situația când ipoteza nulă (H_0) este adevărată.



Ex: Continuând pe linia exemplului anterior, regiunea noastră de respingere cuprinde toate valorile testului statistic (z) mai mari sau egale cu 1,96 și mai mici sau egale cu -1,96. Regiunea de „acceptare" va cuprinde toate valorile cuprinse între -1,96 și 1,96. Astfel, regula de decizie ne indică să respingem ipoteza nulă (H_0) în cazul în care valoarea testului statistic calculată pe baza datelor din eșantion aparține regiunii de respingere și să nu respingem ipoteza nulă dacă valoarea testului se situează în regiunea de „acceptare".

F) <u>NIVELUL DE SEMNIFICAȚIE (α)</u>: ne indică cât de relevante trebuie să fie probele evidențiate la nivel de eșantion pentru a putea concluziona faptul că efectul determinat pentru acesta există și la nivelul întregii populații din care el a fost extras. El specifică în ce măsură probele obținute la nivelul eșantionului trebuie să contrazică ipoteza nulă pentru a putea respinge H_0 pentru întreaga populație. Acest standard reprezintă probabilitatea respingerii unei ipoteze nule adevărate sau probabilitatea de a afirma că există un efect (o diferență, o corelație, o asociere) când de fapt acesta nu este prezent în populație.

Ex: Un nivel de semnificație $\alpha = 0,05$ semnifică un risc de 5% de a lua decizia că un anumit efect există la nivel populațional când în realitate acesta este inexistent. Deoarece respingerea unei ipoteze nule adevărate reprezintă o eroare este necesar minimizăm probabilitatea comiterii acesteia. În consecință, valorile cel mai des întâlnite în practică pentru α sunt 0,01, 0,05 și 0,10.

G) <u>VALOAREA</u> *(p)*: indică nivelul de relevanță al probelor analizate la nivel de eșantion împotriva ipotezei nule H_0, cu alte cuvinte în ce măsură datele din eșantion au puterea de a contrazice ipoteza nulă. Valoarea lui *p* reprezintă probabilitatea de a obține la scara întregii populații efectul observat la nivelul eșantionului sau un efect mai important, în situația când <u>ipoteza nulă H_0</u> (care afirmă faptul că nu există nici un efect) <u>este adevărată</u>. Astfel, valoarea *p* reprezintă valoarea minimă a nivelului de semnificație α pentru care putem respinge ipoteza nulă.

13

În situația în care $p < \alpha$, putem respinge ipoteza nulă și în consecință putem afirma faptul că rezultatele studiului nostru sunt „semnificative statistic”. Altfel spus, datele din eșantionul analizat susțin ipoteza alternativă H_1, potrivit căreia efectul observat este prezent și în cadrul populației generale. Atunci când valoarea lui *p* este superioară nivelului de semnificație α ($p > \alpha$), datele obținute la nivel de eșantion nu aduc suficiente dovezi pentru a concluziona faptul că efectul există în populația studiată. Deși la prima vedere afirmația „nu am reușit să respingem ipoteza nulă” implică o dublă negație trebuie să evităm formularea acesteia sub forma „acceptăm ipoteza nulă”, deoarece nu putem dovedi o negație, probele insuficiente nefiind o dovadă a faptului că ceva nu există. *Nu am reușit să dovedim că efectul există, acesta ar putea exista, dar studiul nostru nu a reușit să-l evidențieze*.

H) TIPURI DE ERORI

Așa cum am văzut anterior, datele analizate la nivel de eșantion trebuie să aducă suficiente dovezi pentru a putea respinge ipoteza nulă H_0 și, în consecință, a putea concluziona că efectul observat în eșantion există și la nivelul populației din care acesta a fost extras.

Într-o situație ideală, un test de ipoteză nu conduce la respingerea ipotezei nule atunci când efectul nu este prezent la nivel populațional și respinge H_0 în situația când efectul există.

În realitate însă, în procesul de testare a ipotezelor, statisticienii se confruntă cu două tipuri de erori, numite erori de tipul I și erori de tipul II, ambele fiind relaționate cu concluzii incorecte privitoare la ipoteza nulă H_0.

REZULTAT TEST / SITUAȚIE DE FAPT	RESPINGEM IPOTEZA NULĂ H_0	NU RESPINGEM IPOTEZA NULĂ H_0
IPOTEZA NULĂ H_0 ESTE ADEVĂRATĂ	EROARE DE TIP I (α) (fals pozitiv)	DECIZIE CORECTĂ ($1-\alpha$) (nu avem efect)
IPOTEZA NULĂ H_0 ESTE FALSĂ	DECIZIE CORECTĂ ($1-\beta$) (efectul există)	EROARE DE TIP II (β) (fals negativ)

ERORILE DE TIP I (valorile fals pozitive): deși atunci când obținem o valoare *p* inferioară nivelului de semnificație fixat α considerăm că rezultatele studiului nostru sunt semnificative statistic, ne putem situa în situația comiterii unei erori de tip I, adică efectul observat la nivel de eșantion nu se regăsește în cadrul populației generale. Atunci când ne situăm în această ipostază nu suntem în mod obișnuit avertizați în nici un fel. Erorile de tip I se datorează erorilor de sondaj, eșantionul nostru supraestimând efectul studiat din pură întâmplare. Chiar dacă nu putem distinge care dintre studii au rezultate fals pozitive, cunoaștem în schimb rata de apariție a erorilor de tip I, care este egală cu nivelul de semnificație al testului statistic (α). Valoarea setată pentru *α* ține de cât de mult suntem dispuși să riscăm apariția unei valori fals pozitive.

În situația când stabilim nivelul de semnificație $\alpha = 0,05$, iar ipoteza nulă H_0 este adevărată, există o șansă de 5% ca testul nostru să respingă H_0 în mod incorect sau să comitem o eroare de tip I (rata fals pozitivilor este de 5%).

ERORILE DE TIP II (valorile fals negative): în situația în care aplicăm un test de ipoteză și valoarea *p* este mai mare decât nivelul de semnificație α, rezultatele noastre nu sunt semnificative statistic, eșantionul analizat nefurnizând suficiente dovezi că efectul studiat există în populația generală. Cu toate acestea, există o șansă ca efectul să fie prezent în cadrul populației, cu toate că rezultatele testului statistic aplicat nu susțin această ipoteză. Această situație apare în practică atunci când ne confruntăm cu o eroare de tip II (β).

În contrast cu situația erorilor de tip I, a care apar doar ca urmare a erorilor de sondaj, în situația **erorilor de tip II** avem mai mulți **factori cauzali** (eșantioane de volum mic, efecte de dimensiuni reduse, un grad mare de variabilitate). În plus, în mod diferit față de erorile de tip I, **în cazul erorilor de tip II nu există posibilitatea stabilirii de la început a unui nivel standard**, ci doar estimarea valorii acestora anterior începerii studiului prin aproximarea proprietăților ipotezei alternative (H_1).

Rata erorilor de tip II (β) reprezintă probabilitatea obținerii unui rezultat fals negativ al testului statistic. În mod firesc, inversul erorilor de tip II reprezintă probabilitatea detectării unui efect în mod corect sau **puterea testului statistic (1 - β)**.

Puterea unui test statistic este influențată în mod direct de **trei factori**: dimensiunea eșantionului, nivelul variabilității existent în populație și dimensiunea efectului analizat.

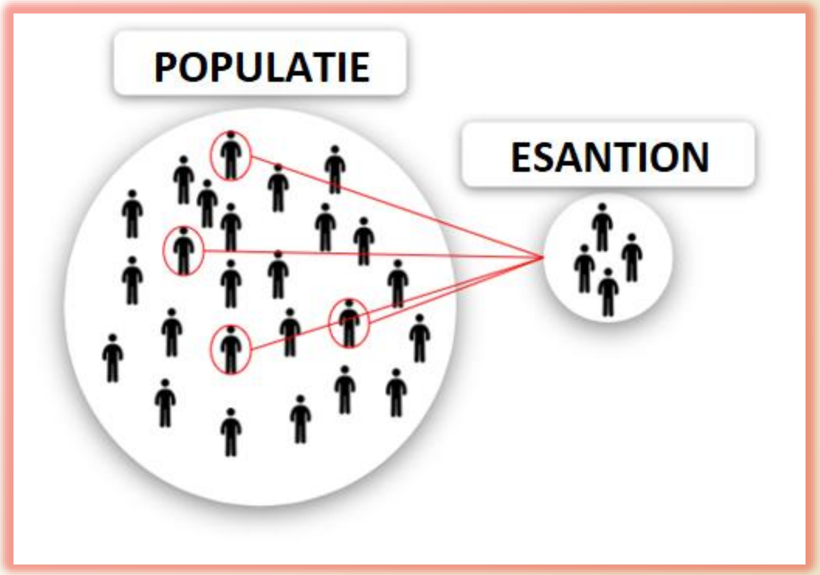
Trebuie să ținem cont de faptul că **nivelul variabilității** (deviația standard a populației) și **dimensiunea efectului** existent în populație reprezintă doar **aproximări** și **presupuneri** și, în consecință, puterea testului și rata erorilor de tip II sunt și ele **doar valori estimative** și nu ceva ce putem alege în mod direct, ca în cazul nivelului de semnificație α.

Elementul cel mai important prin care putem **controla efectul erorilor de tip II** este reprezentat de **DIMENSIUNEA EȘANTIONULUI** → prin creșterea volumului eșantionului de lucru reducem rata de apariție a erorilor de tip II și implicit majorăm puterea testului utilizat.

DETERMINAREA VOLUMULUI EȘANTIONULUI DE STUDIU PENTRU ESTIMAREA MEDIEI UNEI POPULAȚII

În fiecare situație în parte, atunci când lucrăm cu eșantioane și nu cu populațiile generale din care acestea provin, este foarte important să avem siguranța faptului că eșantionul are o dimensiune optimă și reprezintă în mod adecvat întreaga populație. Dacă nu ținem cont de aceste două aspecte fundamentale, rezultatele obținute în urma prelucrării datelor la nivel de eșantion nu pot fi generalizate pentru populația care face obiectul studiului nostru.

Scopul principal al calculării volumului optim al eșantionului în cazul unui studiu clinic este reprezentat de determinarea numărului necesar de participanți pentru a fi în măsură să detectăm un efect (o diferență, o asociere, o corelație) relevant în cazul unui tratament clinic. Utilizarea unui eșantion de volum superior celui necesar pentru a obține rezultatele dorite reprezintă o modalitate de irosire în mod inutil a resurselor, în timp ce, la popul opus, eșantioanele de volum prea redus tind deseori să genereze rezultate fără o utilitate practică.



Vom prezenta în continuare o modalitate simplă de determinare a volumului eșantionului de lucru necesar pentru estimarea mediei unei populații, în cazul unei variabile continue. După cum am detaliat în cursul anterior privitor la estimarea parametrilor unei populații și intervalele de încredere, obiectivul principal în cadrul procesului de estimare este reprezentat de obținerea unor intervale de variație cât mai înguste în care să avem încredere (de obicei $1-\alpha=95\%$) că se află valoarea adevărată dar necunoscută a parametrului de interes, în cazul nostru media populației generale.

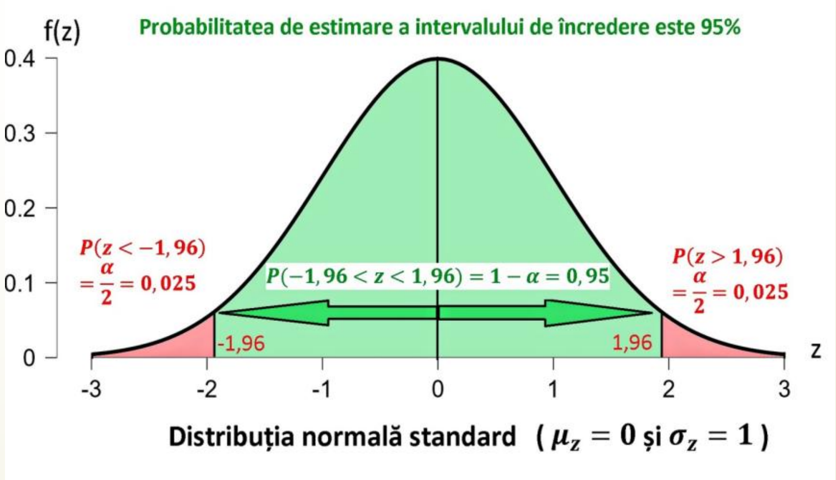
Conform teoremei limită centrală, în situația când volumul eșantionului este mare $(n \geq 30)$ distribuția de sondaj a mediilor eșantioanelor poate fi aproximată printr-o distribuție normală având media μ și deviația standard $\sigma/\sqrt{n}$.

Valoarea $z_{\bar{x}}$ corespunzătoare mediei eșantionului $\bar{x}$ extras din populația generală cu media μ:

$$z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<z_{\bar{x}}<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

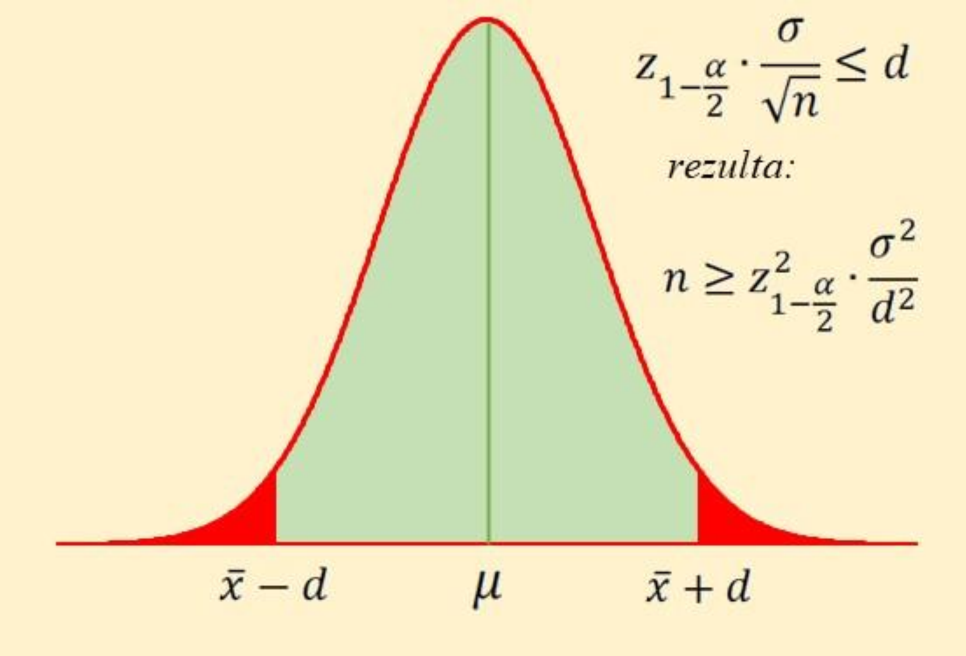


Volumul eșantionului se determină punând condiția ca jumătate din dimensiunea intervalului de confidență pentru media populației generale ($z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) să fie mai mică decât eroarea maximă admisă de specialiști (d).

Eroarea maximă admisă (d) în cadrul fiecărui studiu este stabilită anterior de către echipa de cercetare, aceasta reprezentând diferența maximă acceptată între valoarea parametrului populației generale (μ) și valoarea estimatorului său punctual, calculat la nivel de eșantion ($\overline{x}$).

Efectuând calculele, rezultă: $\mu - \overline{x} \leq d \Rightarrow$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d \quad \Rightarrow \quad n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2}$$



Ex 1: În urma unui sondaj realizat în orașul Iași în anul 2023, în care au fost intervievați 36 de posesori de telefoane iPhone, a fost obținut un preț mediu de achiziție de $\overline{x} = 600$ EUR pentru un telefon. Conform unor cercetări anterioare, se cunoaște deviația standard a populației $\sigma = 60$ EUR.

Se cere:

a) *să se determine un interval de încredere, garantat cu o probabilitate de 95%, pentru prețul mediu de achiziție al unui iPhone în anul 2023 pentru întreaga "populație de proprietari" ai acestui tip de telefon din oraș;*

Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 95\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,96$

Cunoaștem volumul eșantionului $n = 36$, valoarea prețului mediu calculat la nivel de eșantion $\overline{x} = 600$ EUR și deviația standard a „populației" $\sigma = 60$ EUR. Intervalul de încredere pentru media populației μ (prețul mediu al unui iPhone în orașul studiat) se determină după formula:

$$\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Înlocuind, obținem: $600 - 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 600 + 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{36}} \Rightarrow 580,40 \leq \mu \leq 619,60$

b) să se calculeze volumul eșantionului necesar pentru a estima prețul mediu al unui iPhone cu o eroare maximă admisă de 10 EUR ($1-\alpha = 95\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,96$);

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{60^2}{10^2} \Rightarrow n \geq 138,29$$

c) să se calculeze și să se evidențieze din punct de vedere grafic variația volumului eșantionului pe măsura creșterii erorii limită d, în cadrul unui interval valoric cuprins între 2 și 30 ($\alpha = 5\%$ și $\sigma = 60$ EUR rămân nemodificate);

- Pentru o eroare maximă admisibilă $d = 2$ EUR, volumul eșantionului va fi:

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Longrightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{60^2}{2^2} \Longrightarrow n \geq 3457$$

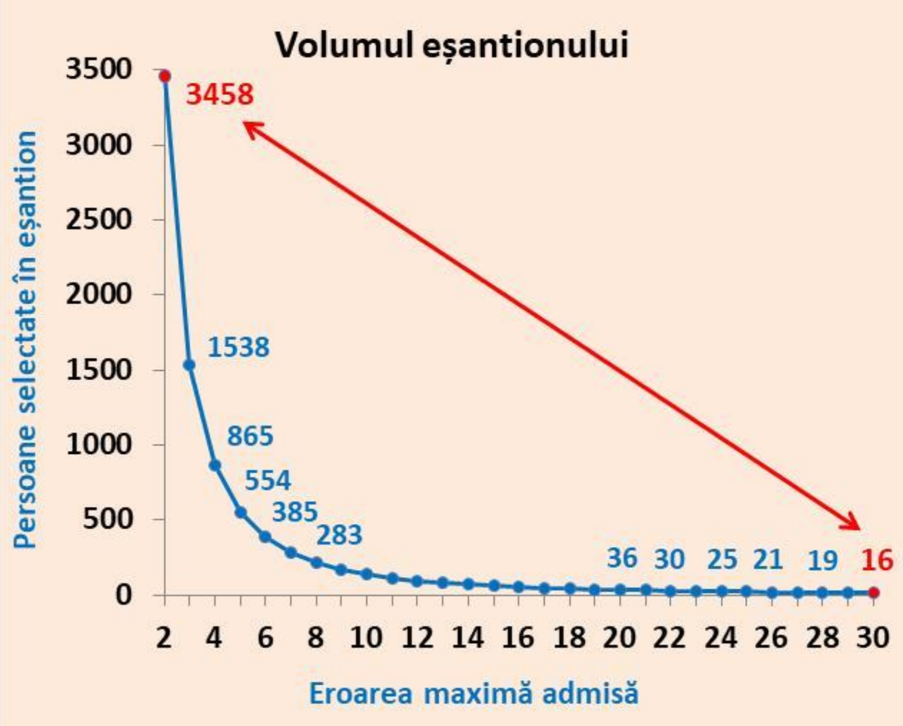
- Pentru o eroare maximă admisibilă $d = 3$ EUR, volumul eșantionului va fi:

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Longrightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{60^2}{3^2} \Longrightarrow n \geq 1536$$

....

- Pentru o eroare maximă admisibilă $d = 30$ EUR, volumul eșantionului va fi:

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Longrightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{60^2}{30^2} \Longrightarrow n \geq 15$$



Pe măsura creșterii erorii limită de la valoarea 2 la valoarea 30, volumul eșantionului se diminuează „dramatic” de la 3458 la doar 16 persoane.

d) să se calculeze și să se evidențieze din punct de vedere grafic variația volumului eșantionului pe măsura creșterii nivelului de încredere $(1-\alpha)$, în cadrul unui interval valoric cuprins între 90 și 99 (eroarea maximă admisă $d = 10$ EUR și $\sigma = 60$ EUR rămân nemodificate);

- Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 90\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,64$ și $d = 10$ EUR, volumul eșantionului:

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (1,64)^2 \cdot \frac{60^2}{10^2} \Rightarrow n \geq 98$$

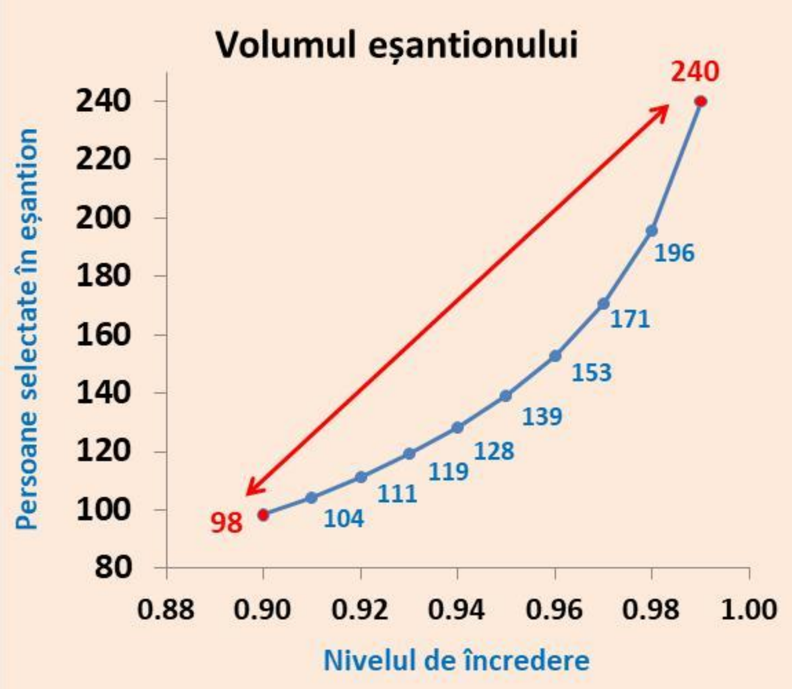
- Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 91\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,70$ și $d = 10$ EUR, volumul eșantionului:

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (1,70)^2 \cdot \frac{60^2}{10^2} \Rightarrow n \geq 104$$

....

- Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 99\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 2,58$ și $d = 10$ EUR, volumul eșantionului:

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (2,58)^2 \cdot \frac{60^2}{10^2} \Rightarrow n \geq 240$$

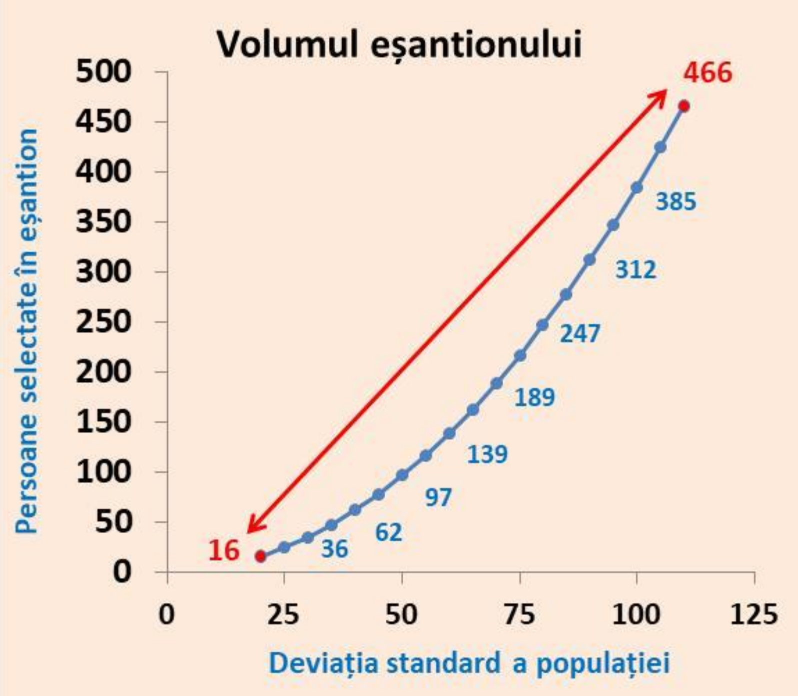


e) să se calculeze și să se evidențieze din punct de vedere grafic variația volumului eșantionului pe măsura creșterii deviației standard a populației de la 20 EUR la 110 EUR ($\alpha = 5\%$ și $d = 10$ EUR rămân nemodificate).

- Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 95\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,96$, $d = 10$ EUR și $\sigma = 20$ EUR volumul eșantionului va fi: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{20^2}{10^2} \Rightarrow$ $n \geq 16$
- Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 95\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,96$, $d = 10$ EUR și $\sigma = 25$ EUR volumul eșantionului va fi: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{25^2}{10^2} \Rightarrow$ $n \geq 25$

....

- Pentru un nivel de încredere: $1-\alpha = 95\%$ avem $z_{1-\alpha/2} = 1,96$, $d = 10$ EUR și $\sigma = 110$ EUR volumul eșantionului va fi: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq (1,96)^2 \cdot \frac{110^2}{10^2} \Rightarrow$ $n \geq 466$



DETERMINAREA VOLUMULUI EȘANTIONULUI PENTRU ESTIMAREA PROPORȚIEI UNEI POPULAȚII

Metoda de determinare a volumului eșantionului necesar pentru estimarea proporției unei populații este similară cu cea prezentată anterior în cazul estimării mediei.

Volumul eșantionului se determină punând condiția ca jumătate din dimensiunea intervalului de confidență pentru media populației generale ($z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_p$) să fie mai mică decât eroarea maximă admisă de specialiști (d).

În situația când volumul eșantioanelor este suficient de mare ($n \cdot p \geq 5$ *și* $n \cdot (1-p) \geq 5$) distribuția de sondaj a tuturor proporțiilor eșantioanelor de volum n extrase dintr-o populație de volum N tinde către repartiția normală.

Dacă populația generală (N) are o proporție π și $\sigma = \sqrt{\pi \cdot (1-\pi)}$, atunci distribuția de sondaj a proporțiilor tuturor eșantioanelor de volum n extrase aleator din aceasta are de asemenea o medie a proporțiilor π și o eroare standard a proporțiilor SEP (deviație standard a distribuției de sondaj a proporțiilor eșantioanelor σ_p) egală cu:

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}$$

$$d \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_p \Rightarrow d \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}} \Rightarrow n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{d^2}$$

Formula anterioară este utilizată în situația când populația studiată are un volum foarte mare sau infinit. Atunci însă când populația are un volum finit, notat cu *N*, se aplică o corecție valorii *n*:

$$n_{corectat} = \frac{n}{1 + \frac{n-1}{N}}$$

Pentru determinarea practică a volumului eșantionului avem nevoie să cunoaștem proporția π din populația generală. Aceasta poate fi estimată în urma efectuării unui studiu pilot. În situația în care nu putem obține un estimator pentru proporția populației putem realiza o aproximare prin adaos, utilizând valoarea $\pi = 0,5$, pentru care produsul $\pi \cdot (1-\pi) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ înregistrează nivelul maxim.

π	$\sigma^2 = \pi \cdot (1-\pi)$
0,10	0,10 * 0,90 = 0,09
0,20	0,20 * 0,80 = 0,16
0,30	0,30 * 0,70 = 0,21
0,40	0,40 * 0,60 = 0,24
0,50	0,50 * 0,50 = 0,25
0,60	0,60 * 0,40 = 0,24
0,70	0,70 * 0,30 = 0,21
0,80	0,80 * 0,20 = 0,16
0,90	0,90 * 0,10 = 0,09

Astfel, chiar dacă nu cunoaștem valoarea proporției din populația generală putem determina volumul eșantionului de studiu, care va avea în acest caz o dimensiune ușor crescută.

În consecință, în situația în care valoarea proporției populației va fi diferită de 0,50 precizia estimării va fi superioară celei anticipate.